MATICE PŘECHODU

$V(P)$, $(u_1, \dots, u_n)$ báze V

$v \in V$ $\exists p_1, \dots, p_n \in P$ tak, že

$$v = p_1 u_1 + \dots + p_n u_n$$

$(p_1, \dots, p_n)$ souřadnice vekt. v vzhledem k bázi $(u_1, \dots, u_n)$

$V(P)$, $(u_1, \dots, u_n)$, $(e_1, \dots, e_n)$ báze V

matice typu $n \times n$ Q
do sloupců píšeme staré souřadnice nových bázových vektorů.

Q se nazývá MATICE PŘECHODU.

$v \in V$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ .. souřadnice v vzhledem k $(u_1, \dots, u_n)$

$x' = (x'_1, \dots, x'_n)$ .. souřadnice v vzhledem k $(e_1, \dots, e_n)$

Platí $x' = Q^{-1} \cdot x$

Př. $\mathbb{R}^2$, $((1,0),(0,1))$ stará báze

$((2,0),(1,1))$ nová báze

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Q^{-1} =$$

$v = (2,3)$ $\quad x = (2,3)$

$x' = Q^{-1} x = (-\frac{1}{2}, 3)$

Elementární úpravy n-tice vektorů:

1) vynásobení i-tého vektoru nenulovým skalárem
2) přičtení násobku i-tého vektoru k j-tému
3) výměna i-tého a j-tého vektoru.

Řekneme, že dvě n-tice vektorů jsou EKVIVALENTNÍ, jestliže jedna vznikne z druhé konečně mnoha elementárními úpravami.

<u>Tvrzení</u> Nechť je n-tice $u_1, \dots, u_n \in V$ ekvivalentní s n-ticí $v_1, \dots, v_n \in V$. Pak n-tice $u_1, \dots, u_n$ generuje V právě tehdy, když $v_1, \dots, v_n$ generuje V.

<u>Tvrzení</u> Nechť je n-tice $u_1, \dots, u_n$ ekvivalentní s n-ticí $v_1, \dots, v_n$. Pak $u_1, \dots, u_n$ jsou lin. nezávislé $\Leftrightarrow$ $v_1, \dots, v_n$ jsou lin. nezávislé.

<u>Tvrzení</u> Nechť $v_1, \dots, v_n$ generují V,

$u_1, \dots, u_m \in V$ lin. nezávislé.

Pak $n \geq m$.

<u>Důsledek</u> Jsou-li $v_1, \dots, v_n$ a $u_1, \dots, u_m$ báze V, pak $n = m$.

DIMENZE vekt. prostoru je počet vektorů v libovolné jeho bázi.

<u>Tvrzení</u> Každý konečněrozměrný vektorový prostor má bázi.

<u>Tvrzení</u> Buďte $u_1, \dots, u_k$ lin. nezávislé vektory n-rozm. prostoru V. Pak je lze doplnit do báze

$u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n$.

VEKTOROVÉ PODPROSTORY

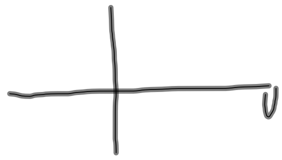
Buď $V(P)$. Podmnožina $U \subseteq V$ se nazývá **PODPROSTOR**, když platí

1) $0 \in U$
2) $\forall a, b \in U$ platí $a+b \in U$
3) $\forall a \in U \; \forall r \in P$ platí $ra \in U$.

Př.: 1) vekt. prostor.

2) nulový prostor $\{0\}$

3) $\mathbb{R}^2 = V$, $U = \{(a,0) \mid a \in \mathbb{R}\}$



$u_1, \ldots, u_n \in V(P)$

Označme $[\![u_1, \ldots, u_n]\!] =$

$$= \{x_1 u_1 + \ldots + x_n u_n \mid x_1, \ldots, x_n \in P\}.$$

Mn. $[\![u_1, \ldots, u_n]\!]$ se nazývá **LINEÁRNÍ OBAL** vektorů $u_1, \ldots, u_n$.

Tvrzení $u_1, \ldots, u_n \in V(P)$. Pak

1) $[\![u_1, \ldots, u_n]\!]$ je vekt. podpr. prostoru V.
2) je-li $U \subseteq V$ podprostor obsahující $u_1, \ldots, u_n$, pak $[\![u_1, \ldots, u_n]\!] \subseteq U$.

Důkaz 1) ověřit 3 podmínky z def. podprostoru.

2)

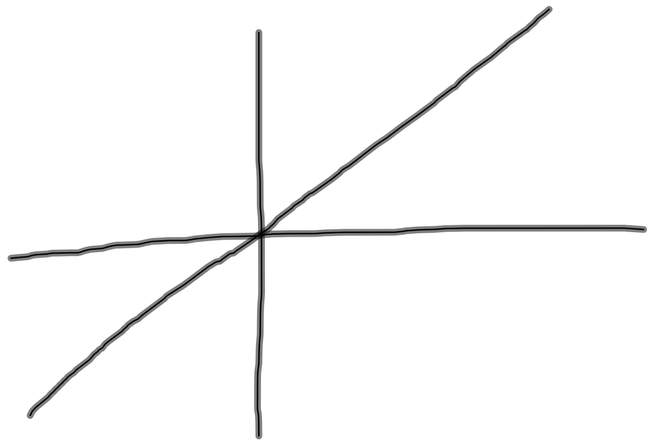
Tvrzení Lin. podprostor konečně rozměrného vekt. prostoru je konečněrozměrný.

<u>Tvrzení</u> V konečněrozm. vekt. pr., $U \subseteq V$ podpr. nechť $\dim U = \dim V$. Pak $U = V$.

<u>Př.:</u> $V = \mathbb{R}^2$

Podprostory: $\mathbb{R}^2$, $\{(0,0)\}$

$\{(a,0) \mid a \in \mathbb{R}\}$



<u>Tvrzení</u> Buďte $U', U'' \subseteq V$ podprostory. Pak $U' \cap U''$ je také podprostor.

<u>Definice</u> U', U'' podprostory V. Označme

$$U' + U'' = \{u' + u'' \mid u' \in U', u'' \in U''\}.$$

$U' + U''$ se nazývá SOUČET podpr. U', U''.

<u>Tvrzení</u> $U' + U''$ je podprostor.